**Fake Fake Fake Z Notation**

1. **序言**

作者：@猫猫の星梦(大群名称：夏夜星空)

特别鸣谢：@一只绵羊2333(大群名称：Asheep233)

这篇文档主要记录了fffz兼容系统的规则。fffz兼容系统是现行fffz兼容规则。经实践充分验证，我们认为该系统基本已经达到了理想的兼容性规则。之所以说是“基本”，是因为缺少证明

该系统的核心规则是εω规则和传递兼容规则。εω规则由@猫猫の星梦提出，但由于缺少基本列这一重要限制因素，导致能让[ε₀,#]存在的序列#太多，产生了无限兼容链——[ε₀,ε₀^ε₀,ε₀^ε₀^ε₀,ε₀^ε₀^ε₀^ε₀,......]。后来，@猫猫の星梦在和@一只绵羊2333沟通时，填补了这一空缺。传递兼容规则是@一只绵羊2333提出的平移转移规则的表现，由于平移转移规则不甚明确，所以该系统便没有使用完整的平移转移规则

fffz可以分为3个版本，分别为Strong、Actual(或Medium)、Weak，本文档所述规则为Strong版。Actrul版是在Strong版的基础上，将核规则中所使用的核给限制成：“如果末项是后继序数，则将那一个序数给替换为它所有有限项之和，否则按照Strong版定义执行”。Weak版是在Strong版的基础上，删去核规则(即双元兼容的流程的第八条)。序言规定对三个版本均有效

每个版本有两个亚版本，分别是I版和II版，I版仅保留BMS“提升”，II版没有任何“提升”，这两亚版本都没有定义，属于理想中的版本。I和II写作Strong、Actual和Weak前面，并与后者之间留一个空格

版本号形如“年.月.日-当天修改次数.之后微调次数”，其中年月日是最近一次修改的日期，“当天修改次数”记录了这是那一天的第几次修改，而“之后微调次数”所指的微调，则是建立在那一次修改后的微调。微调，即细微的调整，如调整序言、补全疏漏等，一般不会对定义产生实质上的影响

该系统不承认“fake后继序数”，但是可以用本系统来判断承认“fake后继序数”的兼容规则，在该情况下进行判断，应将所有表达式均采用不承认“fake后继序数”的形式来表示并判断。该系统的每一套流程均默认按自小序号到大序号的顺序执行，优先使用化简规则直至无法使用再使用主体规则。#、&、%均表示任意序列，“序列”即“有限长有序数组”。若两序列任意一对同位项均相等，则这两个序列相等

极限表达式是ψZ(ψZ(ψZ(...)))

下列定义如有不明确不严谨之处，还请见谅，同时欢迎指正

公元2024年8月31日，第1次修改，之后第2次微调

1. **前置定义**

(一)、**主体规则**

1. ψZ(0)[s]=1
2. ψZ[#](n+1)[s]=ψZ[#](n)×s
3. ψZ[#,m](n)[s]=ψZ[#,m,n]s(n) 当[#,m,n]存在时

ψZ[#,m](n[min{x|n[x]≥m}+s]) 当[#,m,n]不存在时

(二)、**化简规则**

1. ψZ[#,m](n)=ψZ[#](n) 当m>n时
2. ψZ[](n)=ψZ(n)

(三)、**表达式及其比较**

fffz的合法表达式能且仅能通过有限次下列操作获得：

1. 0是合法表达式
2. 如果α、β、γ...都是合法表达式，则α+β+γ+...是合法表达式，同时是复合表达式
3. 如果α、β、...、γ都是合法表达式，且除γ外末项都不是ψZ(0)，则ψZ[α,β,...](γ)是合法表达式，同时是简单表达式

对于非零合法表达式α，α>0

对于合法表达式α=ψZ[#](m)和β=ψZ[#](n)，α>β当且仅当m>n，α=β当且仅当m=n，α<β当且仅当m<n

对于合法表达式α=ψZ[#,a,&](m)和β=ψZ[#,b,%](n)，如果a≠b那么α>β当且仅当a>b，α<β当且仅当a<b

对于合法表达式α=ψZ[#](m)和β=ψZ[#,&](n)，α>β

对于合法表达式α=X+m+A和β=X+n+B，如果m≠n那么α>β当且仅当m>n，α<β当且仅当m<n

对于合法表达式α和β=α+m，α<β

(四)、**名称解释**

对于非零极限序数α=ψZ[#](n)：

1. 如果n为后继序数，则α为+型极限，即0级极限，等级为0
2. 如果[#,n]不存在，则α为ω型极限，即1级极限，等级为1
3. 如果[#,n]存在，则α为ε型极限，即2级极限，等级为2

对于非零极限序数α和β：

1. 如果α的等级大于β的等级，则称α比β高等
2. 如果α的等级等于β的等级，则称α和β同等
3. 如果α的等级小于β的等级，则称α比β低等

对于序数α=ψZ[#,m](n)：

1. 如果[#,m,n]不存在，则α的根为n
2. 如果[#,m,n]存在，则α的根为m

对于非零序数α=ψZ(n)，它的根为n

对于序数α=n₁+n₂+...+nk，n₁是它的首项，nk是它的末项

对于非零序数α=ψZ[#₁](n₁)+ψZ[#₂](n₂)+...+ψZ[#k](nk)，若β属于#₁、#₂、...、#k，或等于n₁、n₂、...、nk，或被任何被α包含的序数包含，则称β被α包含

对于序数α，把所有被它包含的各复合表达式都替换为其末项后的结果，就是它的核

对于任意序列#和&，如果#每一项都和&中与之对应的项相同，则#=&

1. **双元兼容**

对于序数α=ψZ[#](n)和β=ψZ[&](m)：

1. 如果α和β中至少有一个复合表达式，则[α,β]存在当且仅当[α的末项,β的末项]存在
2. 如果α>β，则[α,β]存在
3. 如果α=0，则[α,β]不存在
4. 如果#=&，则[α,β]存在当且仅当[n,m]存在
5. 如果β≥ψZ[α](α)，则[α,β]存在当且仅当[α,β的根]存在
6. 如果存在核分别与α和β相同的A和B，A属于B基本列且比B高等，则[α,β]存在
7. 如果β的核≥ψZ[α的核](α的核)，则[α,β]存在当且仅当[α,β的根存在]
8. 否则，[α,β]不存在
9. **多元兼容**

对于[#,α+A×a,&,β+B×b,%,γ+C×c],其中a、b、c都是正整数,α、A、β、

B、γ、C都是非零极限序数。如果[#,α+A×a,&,β+B×b,%]可不用本条规则就能判断存在，存在[A,B]和[B,C]存在,且α>A、β>B、γ>C,则[#,α+A×a,&,β+B×b,%,γ+C×c]存在

对于[#],如果对于#中任意序数α和在α右边的序数β，[α,β]都存在，则[#]存在

[]存在

对于任意序数α，[α]存在

对于任意序列#，被#包含的空与[#]是否存在无关